

# 二次元 CRD 法における数値的衝撃波の回避に関する考察

堀江 克也<sup>1</sup>・森 明巨<sup>2</sup>・西本 直史<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 いであ株式会社 水圏事業部河川部 (〒154-8585 東京都世田谷区駒沢 3-15-1)  
E-mail:horie@ideacon.co.jp

<sup>2</sup>正会員 いであ株式会社 水圏事業部河川部 (〒060-0062 北海道札幌市中央区南二条西 9-1-2)  
E-mail:mor20733@ideacon.co.jp

<sup>3</sup>正会員 いであ株式会社 建設統括本部 (〒154-8585 東京都世田谷区駒沢 3-15-1)  
E-mail:nishimoto@ideacon.co.jp

著者らが研究する CRD 法は特性帯の理論に基づく多次元解析法である。これまでの研究において、膨張衝撃波の処理には西本らの提案する河床変動解析を利用する方法 (CRDz) を用いてきたが、二次元 CRD 法においてメッシュ形状を工夫することで膨張衝撃波が極めて小さくなることもわかっている。ただしそのメカニズムは明確ではなかった。本研究ではダム破壊流れを対象として、メッシュ形状と膨張衝撃波の発生についての分析を行い、流れに対するメッシュが斜めの場合には常・射流の計算点に情報が伝搬されるため膨張衝撃波が起きにくいことを示した。また、堤防越流流れの再現性も良好であり、不連続流れへの適用が可能であることを示した。

**Key Words:** numerical computation, contour-integration-based residual distribution, avoidance of unphysical expansion shock occurrence

## 1. はじめに

常射流が混在する流れを精度よく解析するためには、不連続部で発生する膨張衝撃波の除去が必要であり、Residual Distribution scheme (RD 法) の二次元解析においては、JHA<sup>1)</sup>や大川ら<sup>2)</sup>などの研究事例がある。この方法は、支配断面のある計算点間で特性速度 $\lambda$ がほぼ0となり特性波の伝搬がなくなることに對して、支配断面を境として上下流に情報が伝搬されるよう、特性速度や流束差の配分を変更するものである。これにより特性波が上下流に配分され膨張衝撃波が除去される。

これに對して西本らは、RD 法を用いた流れの一次元解析において、一次元河床変動解析の波動構造から新しい膨張衝撃波の除去法を示した<sup>3)</sup>。具体的には、一次元河床変動解析では流砂の連続式が加わることで特性波が3つとなるが、これらの特性波は Froude 数=1 で0とならない。3つの特性波のうち二つ ( $\lambda_+$ ,  $\lambda_p$ ) は下流側、一つ ( $\lambda_m$ ) は上流側に配分され、支配断面を挟んで上下流に情報が配分される。この性質を利用し流れの解析において河床変動解析を行い、微量の流砂を発生させて計算する方法である。

著者らが研究する Contour-integral-based residual distribution (CRD) 法は、RD 法と同様に特性帯の理論に基づく多次元解析法であるが、二次元問題でもこの河床変動解析を利用する方法 (CRDz) により膨張衝撃波が除去される<sup>4)</sup>。しかし、CRDz は特性速度を求めるときに3次方程式を解く必要があるため、より簡易な CRD 法の適用性を把握しておくことは重要である。一方、CRD 法の二次元解析において、不連続部の特別な処理をしなくてもメッシュ形状により膨張衝撃波がほとんどでない場合がある<sup>5)</sup>。しかし、不連続流れに對してどの程度解析が可能であるか、膨張衝撃波が発生する場合としない場合の違いは何かなど、二次元 CRD 法における膨張衝撃波の理解が不足している。そこで本研究では、ダム破壊流れを対象として二次元 CRD 法のメッシュ形状と膨張衝撃波の発生の特徴について分析を行うとともに、その結果を踏まえ、堤防越流流れの実験値との比較により、二次元 CRD 法における不連続流れへの適用性について考察する。

## 2. 計算法

(1) CRD 法

CRD 法の計算法は文献 5) に示す以下の方法である。  
 二次元一階双曲型偏微分方程式を式(1)で表す。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} + \Omega = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\phi$  は保存変量、 $\mathbf{F}$  は流束である。ガウスの発散定理を使えば、式(1)は式(2-1)、式(2-2)に書き換えられる(簡単のため  $\Omega = 0$  とする)。

$$\int_T \frac{\partial \phi}{\partial t} dT + \Phi^T = 0 \quad (2-1)$$

$$\Phi^T = \int_T \nabla \cdot \mathbf{F} dT = \oint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{n} \quad (2-2)$$

ここに、 $\Phi^T$  は Residual と呼ばれる。 $\mathbf{n}$  は計算領域の境界線に外向きの垂直ベクトル、 $T$  は計算要素(ここでは三角形)を表す。 $\Phi^T$  を式(3)に示す係数  $\beta_i^T$  に応じて、計算点  $i$  へ配分する。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \beta_i^T \Phi^T \quad (3)$$

ここに、 $n$  は時間ステップ、 $\sum_i \beta_i^T = 1$  である。

計算には非構造の三角形格子を用い、図-1のように三角形の頂点に計算点 (Cell-vertex) をとり、Residual  $\Phi^T$  を計算する。式(2-1)に左固有ベクトル  $L$  を作用させて固有ベクトル空間に変換し、 $L\Phi^T$  を Inflow parameter  $k_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i / 2$  の符号が正の方向に配分する(風上スキーム)。ここに、 $\mathbf{a}$  は倍特性ベクトルであり、 $\mathbf{n}_i$  は辺に垂直で計算要素に内向きのベクトルである。図-2(a)のように  $k_i > 0$  が1点の場合は点1に配分する。(b)のように2点に向かう場合には多くの方法が提案されているが、本論文では  $k_i$  の比に応じて配分する(4)式の方法を用いる。得られた配分に右固有ベクトル  $R$  を作用させて元の空間に戻し、 $\Delta t$  後の保存変量  $\phi$  を算定する。

$$\text{LDA-scheme}^5) \begin{cases} \beta_2 = k_2 / (k_2 + k_3) \\ \beta_3 = k_3 / (k_2 + k_3) \end{cases} \quad (4)$$

(2) 基礎方程式

平面二次元浅水流方程式は(1)式において、

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ q_u \\ q_v \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hv \\ q_u \mathbf{v} + g[h]H\mathbf{i} \\ q_v \mathbf{v} + g[h]H\mathbf{j} \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ fq_u \\ fq_v \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここに、 $h$  は水深、 $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ 、 $u, v$  は  $x, y$  方向の水深平均流速、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  は  $x, y$  方向の単位ベクトル、 $q_u = uh$ 、 $q_v = vh$ 、 $g$  は重力加速度、 $H$  は水位、 $f = gn^2q/h^{7/3}$ 、 $n$  はマンニングの粗度係数、 $q$  は単位幅流量である。なお、 $[ ]$  は計算要素の平均を表し定数として扱う。

(3) 抵抗項の取り扱い

水深がゼロに近く流速が速い場合、式(5)の抵抗項が非物理的な値となるため、 $\Delta t$  後の保存変量  $\phi^{n+1}$  を算出する際に式(6)に示すように抵抗項を陰的に取り扱う。

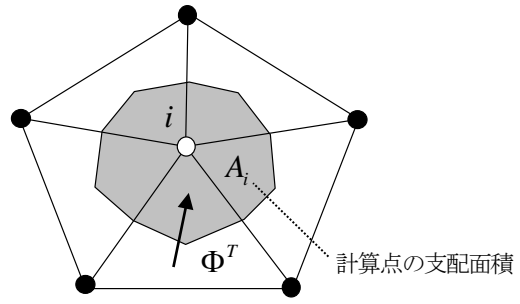
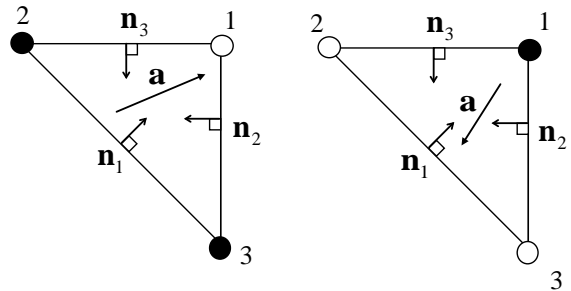


図-1 CRD 法における計算点(三角形の頂点におく)



(a) 点1に配分する (b) 点2,3に配分する

図-2 Residual の配分法-波動の伝播する  $\mathbf{a}$  の方向に配分

表-1 ダム破壊流れの計算ケース  
(直角メッシュと斜めメッシュ共通)

ケース No.	初期水深	
	ダム部	水路部
1	0.5m	0.01 m
2	0.5 m	0.02 m
3	0.5 m	0.03 m
4	0.5 m	0.04 m
5	0.5 m	0.05 m

$$\begin{pmatrix} h \\ (1+f\Delta t)q_u \\ (1+f\Delta t)q_v \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} h \\ q_u \\ q_v \end{pmatrix}^n - \frac{\Delta t}{A_i} \beta_i^T \Phi^T \quad (6)$$

(4) 上下流端

上流端及び下流端においては所定の境界値となるように式(7)により計算領域外から特性波  $\partial\omega$  を与える。

$$\partial\phi = R\partial\omega \quad (7)$$

ここに、 $R$  は右固有ベクトル、 $\partial\omega = L\Phi^T$  である。

3. 膨張衝撃波の発生の特徴

ダム破壊流れを対象として、二次元 CRD 法における膨張衝撃波の発生状況を示す。初期水深はダム部 0.5m とし、水路部を 0.01m から 0.05m までの 5 ケースとした(表-1)。河床高は 0.0m の水平、川幅は 3.0m で一定、粗度係数は 0 である。計算格子は  $\Delta x \doteq 0.5m$  の三角形格子であるが、計算格子の作成が容易な四角形を斜めにしたメッシュ(直角メッシュ)と計算点が横断方向に一直列

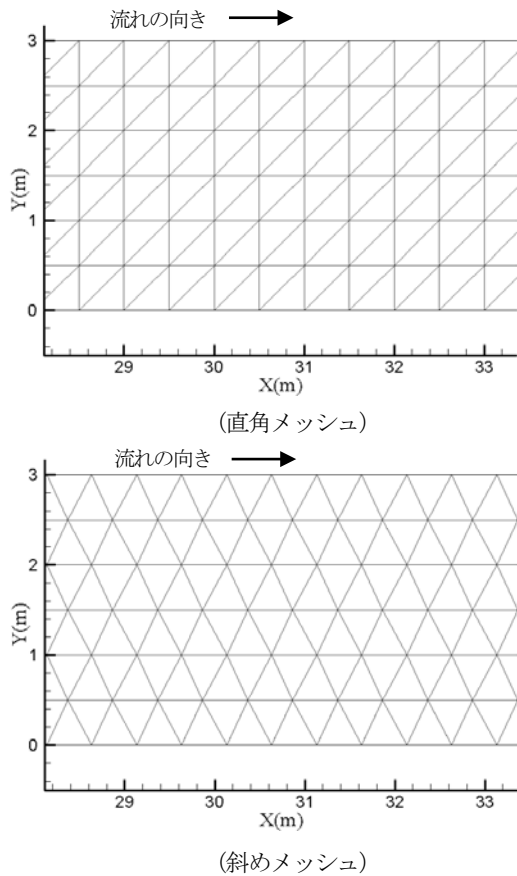


図-3 ダム破壊流れの計算メッシュ (部分的な拡大図)

に並ばない斜めメッシュの2ケースとした (図-3)。

図-4 は計算開始から 10 秒後の水位とフルード数のコンター図である。直角メッシュでは  $x=30\text{m}$  の支配断面付近で膨張衝撃波が発生するが、斜めメッシュでは極めて小さくなっている。横断平均水位は斜めメッシュでは理論値  $\eta$  を良好に再現しており、膨張衝撃波が除去される (図-5)。この違いを明らかにするため、支配断面が含まれるメッシュのフルード数と Residual の配分の関係調べたところ、斜めメッシュでは三角形の計算点のうち常流の計算点に配分される Residual が存在するが、直角メッシュでは射流の計算点 (下流側) にすべて配分される (図-6)。支配断面を含むメッシュでは、本来支配断面を境として情報が常流と射流の両方に伝搬されるはずであるから、直角メッシュでは支配断面の特性を適切に表していない (図-7)。直角メッシュには計算点の 2 点の下流側 (射流) となるメッシュがあり、平均フルード数は射流となる。このとき上流側 (常流) の計算点に対する Inflow parameter  $k$  の符号は負となるため上流側には配分されない。一方、斜めメッシュでは平均フルード数が射流となっても、波動が伝搬する  $\mathbf{a}$  の向きによっては Inflow parameter  $k$  の符号が負にならないため、常流と射流の両方の計算点に Residual が配分される (図-8)。以上より、二次元 CRD 法においては、1 次元的な流れ

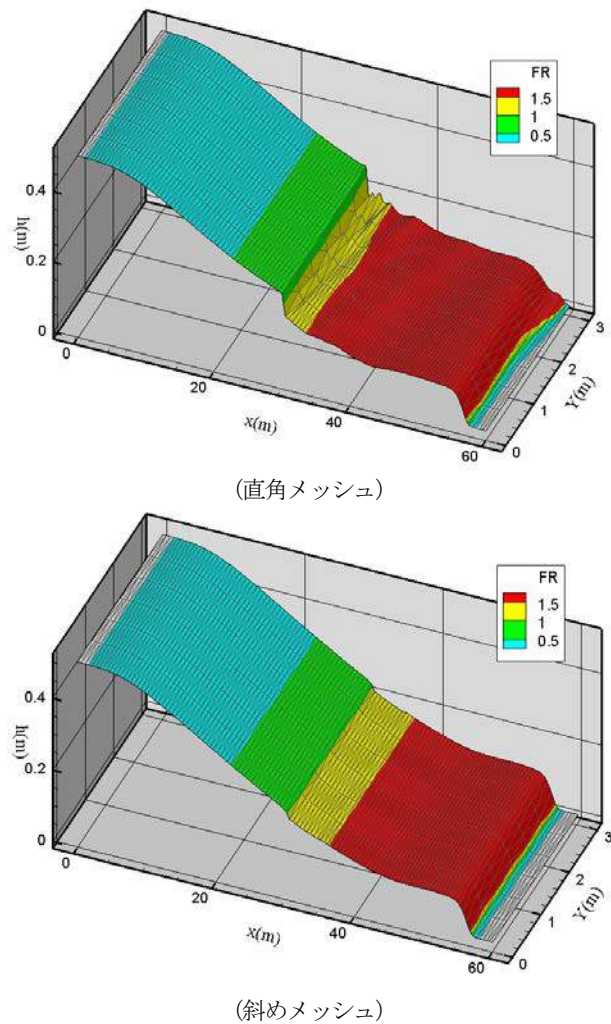


図-4 10 秒後の水位とフルード数コンター図 (ケース 1)

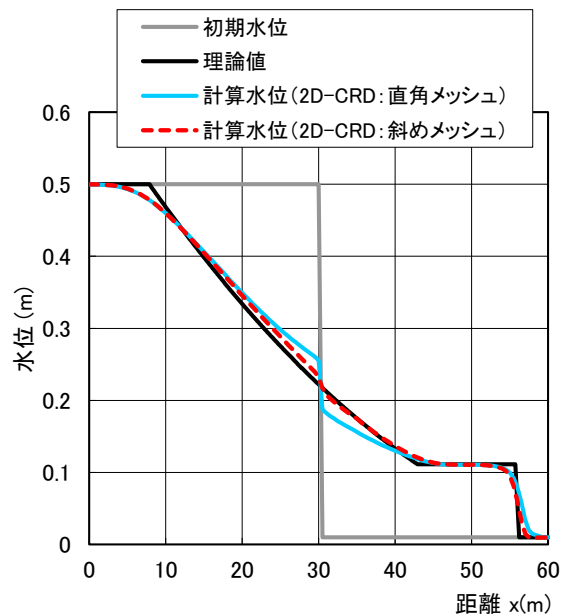


図-5 10 秒後の横断平均水位の比較 (ケース 1)

に対して直角方向にメッシュの境界線を配置した場合には、そこで膨張衝撃波が発生しやすいが、斜めになる

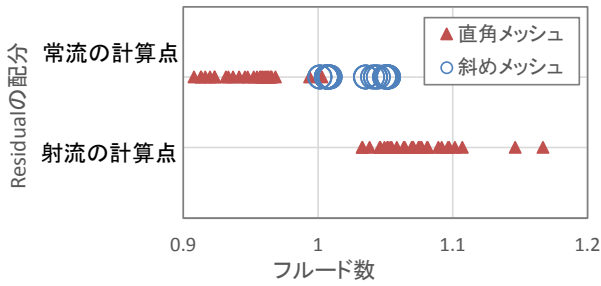


図-6 フルード数と Residual の配分の関係

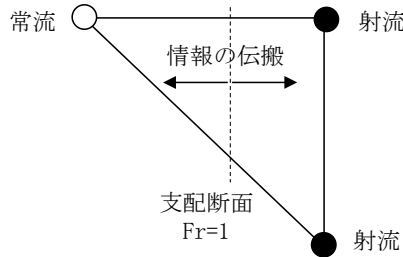


図-7 支配断面を含むメッシュ

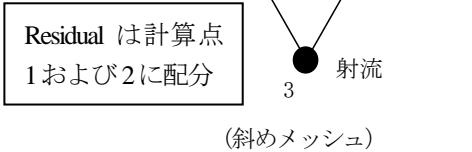
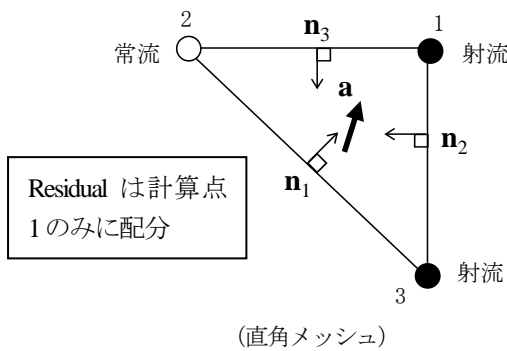


図-8 擾乱の伝搬速度と配分方向

ようメッシュを作成することで膨張衝撃波を回避できる。

#### 4. 堤防越流流れへの適用

著者らは、既往論文<sup>6)</sup>で千歳川の支川嶮淵川における右岸地区の遊水地水理模型実験結果<sup>7)</sup>を対象とした CRDz の適用性を確認している<sup>9)</sup>。上記 3.の膨張衝撃波の発生要因を踏まえ、斜めメッシュの適用性を検討する。

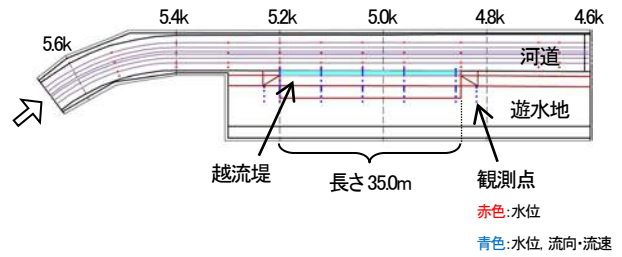


図-9 実験水路の平面図

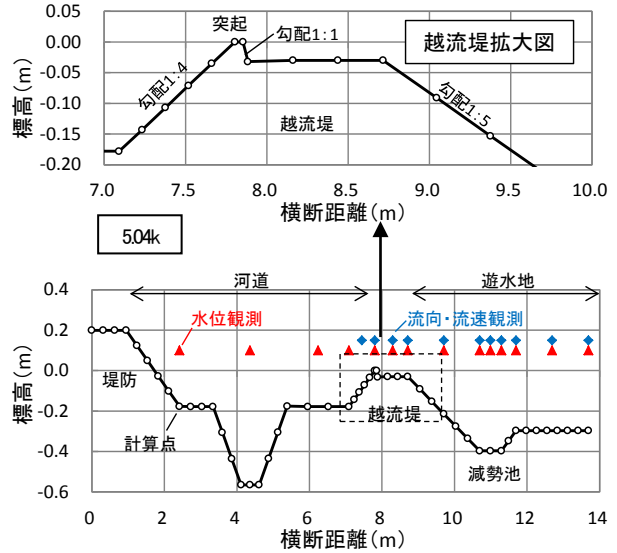


図-10 実験水路の横断面と観測位置

#### (1) 実験水路の概要

模型実験は 1/10 スケールで行われ、河床勾配は約 1/1,720、川幅は約 7.0m で複断面形状を有しており、湾曲部下流側の直線部に越流堤長 35.0m の遊水地が設置されている (図-9)。また、越流堤は台形断面であるが法肩に高さ 0.03m の突起が設置されている。越流堤の勾配は川表側 4 割、川裏側 5 割となっており、遊水地には底幅 0.6m の減勢池がある (図-10)。模型実験では河道、越流堤及び遊水地における水位、流向・流速の多点観測が行われており、遊水地への越流量データが存在する。

#### (2) 直角メッシュによる計算

文献 6) と同様の計算メッシュを用いるが、越流堤突起部付近で発生する支配断面に対して、直角メッシュとなっている (図-11)。計算ケースは表-2 の 7 ケースとし、上流端流量と下流端水位を与えて計算を行った。なお、下流端水位は模型実験と同様に 5.0k の越流水深が実験値となるよう調節し、ドライ・ウェットの境界条件には運動学的条件<sup>8)</sup>を使用した。

直角メッシュを用いたケース 1-4 のフルード数コンターを図-12 に示す。図-12 は計算開始から 1,800 秒後の状況であるが、越流堤突起部付近で水位が低下しフルード数 6 以上の高い値となっている。この膨張衝撃波が振動

表-2 計算ケース

ケース	上流端流量 (m <sup>3</sup> /s)	実験-越流水深 (m)	実験-越流量 (m <sup>3</sup> /s)
1-1	0.645	0.0305	0.294
1-2	0.645	0.0344	0.358
1-3	0.645	0.0404	0.467
1-4	0.645	0.0493	0.645
2-1	0.518	0.0285	0.272
2-2	0.518	0.0351	0.367
2-3	0.518	0.0438	0.518

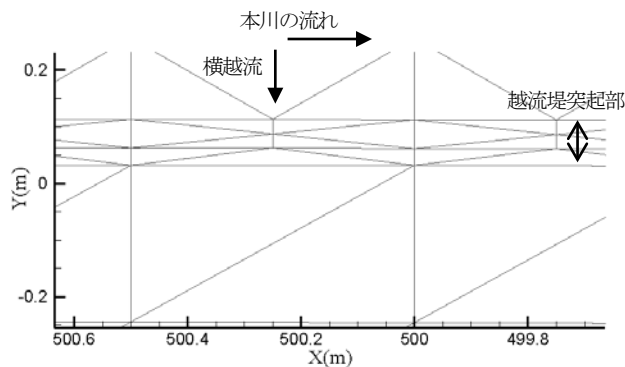


図-13 越流堤突起部周辺のメッシュ (斜めメッシュ)

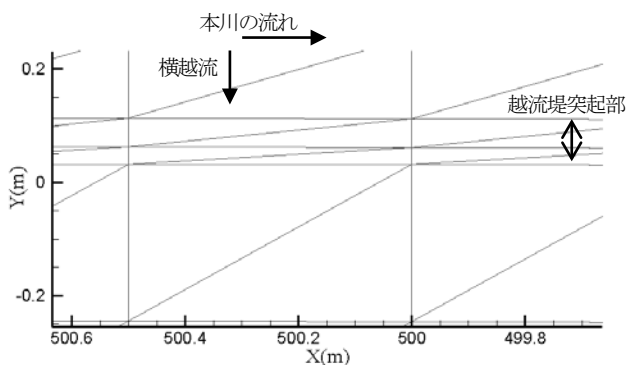


図-11 越流堤突起部周辺のメッシュ (直角メッシュ)

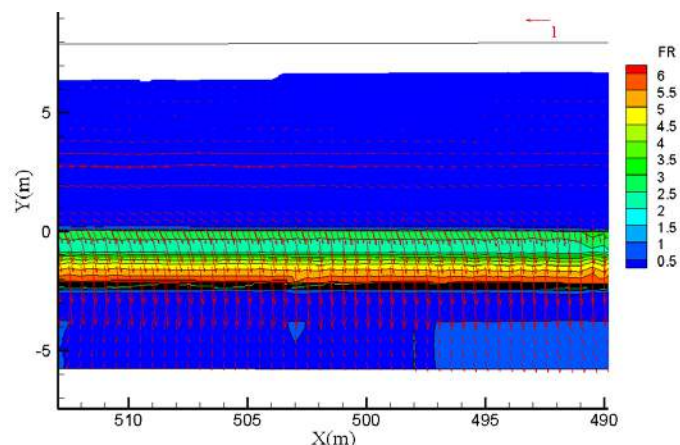


図-14 越流堤周辺のフルード数コンター図 (斜めメッシュ)

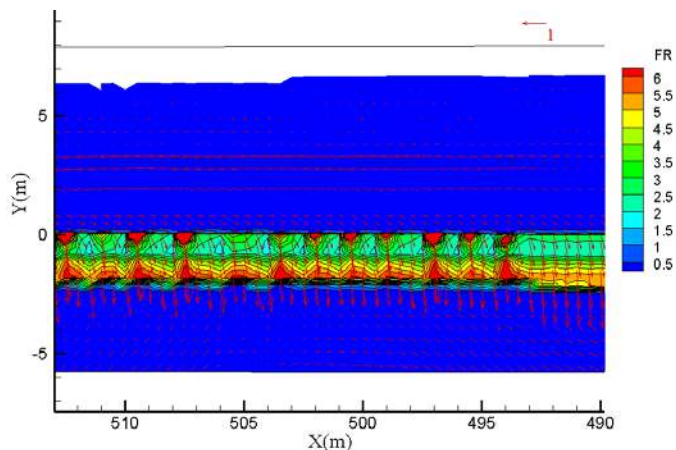


図-12 越流堤周辺のフルード数コンター図 (直角メッシュ)

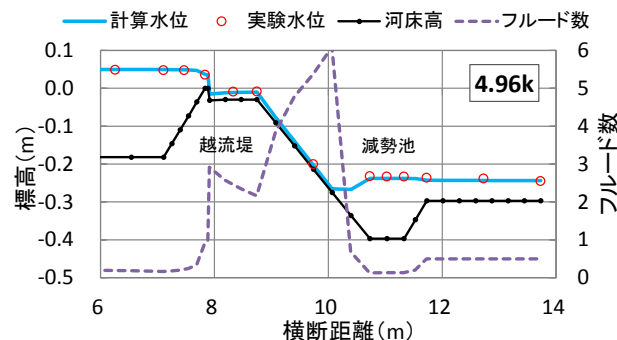


図-15 水位・水深の横断分布 (斜めメッシュ)

を引き起こし計算は安定しない。

### (3) 斜めメッシュによる計算

支配断面が発生する越流堤突起部のメッシュ形状を横越流に対して斜めに設定し、上記(2)と同様の計算を行った。計算メッシュは図-13に示すとおりである。

直角メッシュでは膨張衝撃波が発生していたが、支配断面となる計算メッシュを斜めにするにより、膨張衝撃波は除去される (図-14)。また、越流堤周辺の常射流混在流れにおける水位・水深や流速の再現性は良好である (図-15、図-16)。越流量についても実験値に近い値となっており、CRDz でなくても概ね再現性は確保されている (図-17)。

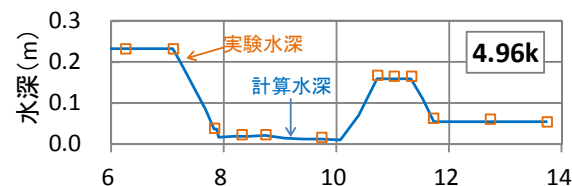
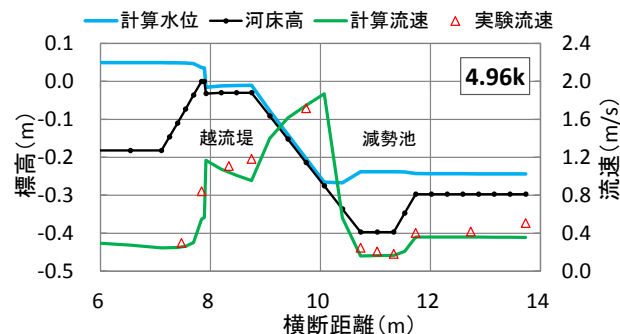


図-16 流速の横断分布 (斜めメッシュ)



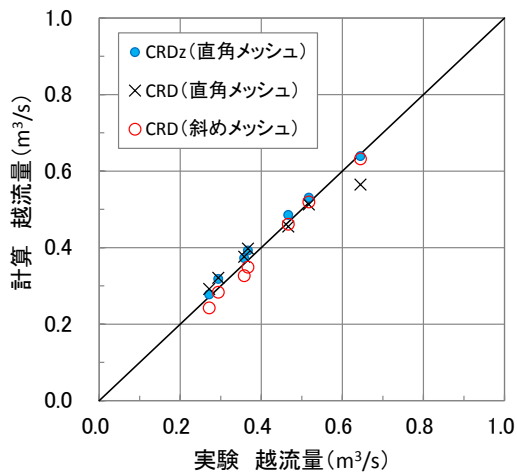


図-17 越流量の比較

## 5. おわりに

本研究では、二次元 CRD 法による膨張衝撃波の除去に関する考察を行った。これまでの著者らは、二次元 CRD 法の膨張衝撃波の除去については、河床変動解析を利用する方法 (CRDz) を用いてきた。しかし、メッシュ形状を工夫することで膨張衝撃波がほとんどなくなることもわかっており、そのメカニズムが明確ではなかった。このため、本研究ではダム破壊流れを対象に二種類のメッシュ形状 (直角メッシュ, 斜めメッシュ) の計算を行い、その違いから膨張衝撃波の発生要因について分析を行った。結果として、直角メッシュの 2 点が下流側にある場合、支配断面の平均フルード数が 1 以上 (射流) となること、流れに対して垂直方向に三角形の辺があるため Inflow parameter  $k$  の符号が負にならないことがわかった。このため、直角メッシュでは支配断面で上流側 (常流) と下流側 (射流) に情報が伝搬されない。一方、斜めメッシュにすると支配断面で上下流に情報が伝搬されるため膨張衝撃波が発生しにくい。この特性を勘案し支配断面が含まれる部分を斜めメッシュとすることで、遊水地の越流流れへも良好に再現できた。このこと

から、二次元 CRD 法においても支配断面が含まれるメッシュ形状の流れに対して斜めにする事で膨張衝撃波の発生を回避できる。なお、CRD 法は非構造格子の解析法であるため、膨張衝撃波の発生場所が事前に予測できない場合でもメッシュ形状の修正は容易であり、多くの流れ場に適用可能と考えられる。また、非定常流のように時間的に変化する場合についても、一次元的な流れとならないようにすることで対応可能と考えられる。

謝辞：貴重なデータを提供して頂いた北海道開発局札幌開発建設部千歳川河川事務所に対し深く謝意を表します。

## 参考文献

- 1) Jha,A.K., Akiyama,J. and Ura, M. : Higher order FDS scheme for rapidly varied 2-d flow simulations, Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE, Vol.43, pp.503-508, 1999.
- 2) 大川秀典, 清水康行, 藤田睦博: FDS を用いた開水路における衝撃波を含む流れの数値解析, 水工学論文集, 第 41 巻, pp.611-616, 1997.
- 3) 西本直史:急勾配水路における流れと河床変動の数値解析に関する研究, 北海道大学学位論文, 2000.
- 4) 堀江克也, 森明巨, 西本直史: 急勾配河川に CRD 法を適用する場合のドライ・ウェットの境界条件と流量誤差, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.69, No.4, pp.I\_649-I\_654, 2013.
- 5) 堀江克也, 岡村誠司, 小林雄介, 兵藤誠, 樋田祥久, 西本直史, 森明巨: CRD 法を用いた常流・射流混在流れの数値解析, 水工学論文集, 第 55 巻, pp.1189-1194, 2011.
- 6) 堀江克也, 森明巨, 平井康幸, 西本直史: CRD 法による遊水地への越流計算, 河川技術論文集, 第 22 巻, pp.115-120, 2016.
- 7) 平成 21 年度嶮淵右岸地区遊水地水理模型実験解析業務報告書,平成 22 年 1 月
- 8) 堀江克也, 森明巨, 西本直史: 急勾配河川のドライ・ウェットの境界条件と流量誤差, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.70, No.4, pp.I\_739-I\_744, 2014.

(2016.9.30 受付)

## STUDY ON AVOIDANCE OF UNPHYSICAL EXPANSION SHOCK OCCURRENCE IN TWO-DIMENSIONAL CRD SCHEMES

Katsuya HORIE, Akio MORI and Naoshi NISHIMOTO

CRD scheme is a numerical computational method based on the multi-dimensional characteristic theory. Our previous studies have adopted a CRDz scheme, using a bed variation model to avoid unphysical expansion shock occurrence. Another result also showed that a 2-D CRD scheme can also drastically reduce the occurrence by modifying the mesh shapes. However, its mechanisms have not been revealed. This study analyzes relationships between mesh shapes and expansion shock occurrence under dam-break flows. Results showed that expansion shock occurrence can be avoided when flow direction and mesh are allocated non-perpendicularly, since information is distributed both to subcritical and critical numerical points. This scheme could also work under bank-overtopping flows, indicating its applicability to discontinuous flows.